## 1.Oscillazioni armoniche

La più semplice funzione periodica è la funzione asen$\omega$t, o più generalmente asen($\omega$t+$\varphi$), dove a,$\omega$, $\varphi$ sono costanti.

Rappresenta oscillazioni, o vibrazioni sinusoidali e viene chiamata *armonica elementare*. Il periodo dell'oscilazione è T=2$\pi$/$\omega$ mentre il suo inverso $\omega$/2$\pi$ è la *frequenza*, il numero $\omega$ è detto *pulsazione o frequenza angolare*. La quantità a è l'*ampiezza* dell'oscilazione mentre $\varphi$ è la *fase*.

Usando le formule di addizione per le funzioni trigonometriche, un'armonica elementare asen($\omega$t+$\varphi$) può essere espressa nella forma $\alpha \cos \omega t + \beta sen\omega t,$ con $\alpha = asen\varphi, \beta = b\cos \omega t.$

Conseguenza di questa rappresentazione è il fatto che la somma di due o più vibrazioni aventi tutte le stessa frequenza è un'altra vibrazione con la medesima frequenza.

In generale un fenomeno oscillatorio dà luogo a una sovrapposizione di molte oscilazioni sinusoidali con frequenze diverse.

Quando con un violino si suona una nota che corrisponde al DO centrale del pianoforte (256 Hz), accanto alla sinusoide con questa frequenza f si producono altri suoni, di frequenze 2f,3f,4f,5f,6f,...;essi corrispondono alle note DO",SOL",DO"',MI"',SOL"",...Ci possiamo rendere conto di questo fatto sollevando il coperchio del pianoforte e tenendo premuto il pedale, in modo che le corde siano libere di vibrare.Se si produce la stessa nota su di un violino si vede che entrano in vibrazione le corde che "corrispondono" alla nota prodotta,che hanno rispettivamente frequenze 256,512,767,1024,1290,1534 Hz, e vibrano anche le corde SIb"' (1825 Hz) e del DO"" (2048 Hz). Delle varie componenti del suono, quella con frequenza minore si dice *fondamentale* e le altre si chiamano *prima*, *seconda*, *terza*,...*armonica*.

Si noti che le ampiezze delle armoniche non uguagliano quella della fondamentale, ma decrescono in successione.

Le armoniche del DO, vale a dire DO,SOL,DO,MI,SOL,.., sono "consonanti" e i rapporti fra le loro frequenze molto semplici: essi prendono il nome di "accordi".

Vi è un fenomeno interessante che vale la pena di notare: con riferimento alla figura 1, il grafico della funzione in (a) è dato dalla somma dei grafici delle quattro funzioni a lato. Un'onda "pura" dipende, oltre che dalla ampiezza e dalla frequenza, anche dalla fase $\varphi$: se le armoniche vengono lievemente sfasate l'onda che ne risulta ha un grafico completamente diverso, che è raffigurato in (b); tuttavia il nostro orecchio non percepisce alcuna variazione.Si può pensare che (a) e (b) siano i tracciati di una puntina di un microsolco, in assenza e in presenza di uno spostamento di fase delle armoniche, oppure il tracciato del moto della membrana timpanica: a fronte di tracciati molto diversi, ma costituiti dalle stesse armoniche con le stesse frequenze ma con fasi differenti, la percezione acustica è la stessa. Il nostro orecchio (o meglio il nostro cervello) pur non conoscendo l'analisi di Fourier effettua spontaneamente la scomposizione di un suono nelle sue componenti.

Un altro fenomeno interessante è quello dei *battimenti*: se sovrapponiamo due suoni di ampiezze unitarie con frequenze $\omega_1$ e $\omega_2$ e, per comodità, uguali fasi, la vibrazione risultante è

$$y=\text{sen}\,\omega_1 t + sen\omega_2 t = 2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t sen\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t$$

Questa vibrazione ha periodo $\frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2}$ e ampiezza variabile $2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t,$ la quale è a sua volta periodica di periodo $\frac{4\pi}{\omega_1-\omega_2}$

Supponiamo che le quantità $\omega_1$ e $\omega_2$ siano abbastanza grandi se comparate alla differenza $\omega_1$-$\omega_2$; allora l'ampiezza della vibrazione varia lentamente e ciclicamente rispetto al periodo della vibrazione: questo cambiamento ritmico di ampiezza prende il nome di *battimento*. Si tratta di un fenomeno tipico delle trasmissioni radio che è a tutti familiare: quando si cerca di sintonizzare una radio su una determinata frequenza, se su una frequenza vicina emette un'altra stazione si percepisce un fastidioso ronzio;lo stesso fenomeno si può riprodurre con la percussione simultanea di due tasti successivi del pianoforte (ad es. DO,DO#).

## 2.Serie trigonometriche

Sia f una funzione numerica definita in tutto R.

Tale funzione è detta *periodica di periodo T* se per ogni valore della x risulta

(1) f(x+T)=f(x).

La f è completamente determinata su tutto R una volta noti i suoi valori in un intervallo [a,a+T],

essendo a $\in R$.

Se la f è periodica di periodo T, ha anche periodo kT, ove k è un numero intero, positivo o negativo.

Consideriamo *le funzioni periodiche semplici*, *relative al periodo T*, che sono le seguenti:

1 *periodica di periodo arbitrario*

$\cos\frac{2\pi x}{T}, sen\frac{2\pi x}{T}$ *periodiche di periodo T*

$\cos\frac{4\pi x}{T}, sen\frac{4\pi x}{T}$ *periodiche di periodo T*/2

.

.

.

$\cos\frac{2n\pi x}{T}, sen\frac{2n\pi x}{T}$ *periodiche di periodo T*/*n* ($n \in N$)

Tutte queste funzioni hanno T come periodo comune e quindi una loro combinazione lineare a coefficienti costanti è ancora una funzione periodica di periodo T.

Una tale combinazione lineare, che è indicata con

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos\frac{2k\pi x}{T} + b_k sen\frac{2k\pi x}{T}),$$

dove $a_0, a_k, b_k \in R,$ sono numeri reali, è detto *polinomio trigonometrico di ordine n*.

Chiameremo *serie trigonometrica* una serie del tipo

(2) $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos \frac{2k\pi x}{T} + b_k sen \frac{2k\pi x}{T}),$$

dove $a_0, a_k, b_k \in R,$ sono numeri reali detti *coefficienti* della serie.

Se la serie (2) converge in un intervallo del tipo [a,a+T], converge in ogni punto di R e la sua somma è una funzione f periodica di periodo T.

In molte questioni è di fondamentale importanza sapere se vale la proprietà inversa cioè

*Data una funzione f periodica di periodo T, è posibile rappresentarla come somma di una serie trigonometrica* ?

In altre parole, data la f, è possibile determinare le costanti $a_0, a_k, b_k$ in modo che si abbia

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos \frac{2k\pi x}{T} + b_k sen \frac{2k\pi x}{T})$$

Nelle ipotesi che verranno indicate, una qualsiasi funzione periodica f si potrà esprimere come combinazione lineare di funzioni periodiche semplici, in numero finito o infinito.

Quando tale decomposizione sarà possibile, il primo termine della serie ( a prescindere da quello cosatante $\frac{a_0}{2}$) cioè

$$a_1 \cos \frac{2\pi x}{T} + b_1 sen \frac{2\pi x}{T}$$

si chiama la *prima armonica o l'armonica fondamentale della f*; il termine

$$a_2 \cos \frac{4\pi x}{T} + b_2 sen \frac{4\pi x}{T}$$

si chiama la *seconda armonica della f*; in generale, il termine

$$a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n sen \frac{2n\pi x}{T}$$

chiamasi l'*ennesima armonica della f*

Il calcolo di questi termini costituisce la cosidetta *analisi armonica di f*.

## 3.Continuazione

Osserviamo che possiamo sempre suppporre T=$2\pi$. Infatti, con il cambiamento di variabile x=$\frac{T}{2\pi}u,$ la funzione f(x) si trasforma nella $\varphi(u) = f(\frac{T}{2\pi}u),$ che è periodica di periodo $2\pi$.

Possiamo perciò supporre che f(x) sia periodica di periodo $2\pi,$ quindi basta considerarla nell'intervallo [0,$2\pi$].

In tali ipotesi la serie (2) si scrive

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k sen kx)$$

**Teorema**: Se per la funzione f, periodica di periodo $2\pi$, vale lo sviluppo

(4) $\quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k senkx)$

e la serie è uniformemente convergente in $[0,2\pi]$, allora i coefficienti $a_n$ e $b_n$ sono necesssariamente dati dalle formule

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \qquad n=0,1,2,....$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) sennx dx \qquad n=1,2,.... \qquad (5)$$

**Dimostrazione**

Se n>0, risulta

$$\int_0^{2\pi}\cos nx dx = 0 \text{ e } \int_0^{2\pi} sennx dx = 0 \qquad (6)$$

Inoltre se n,m>0 essendo per le formule di prostaferesi

cos(m+n)x+cos(m-n)x=2cosmxcosnx
cos(m+n)x-cos(m-n)x=-2senmxsennx
se(m+n)x+sen(m-n)x=2senmxcosnx

si ottiene

$$\int_0^{2\pi}\cos mx \cos nx dx = 0 \quad \text{per } m \neq n$$
$$= \pi \quad \text{per } m=n$$

$$\int_0^{2\pi} senmx sennx dx = 0 \quad \text{per } m \neq n$$
$$= \pi \quad \text{per } m=n$$

$$\int_0^{2\pi} senmx \cos nx dx = 0 \qquad (7)$$

Per determinare $a_0$ integriamo, nell'intervallo $[0,2\pi]$, la serie (4) termine a termine (converge uniformemente).

Otteniamo

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}(a_k \cos kx dx + b_k senkx)dx$$

Per le (6), gli integrali a secondo membro, tranne il primo, sono tutti nulli e quindi si ha

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}2\pi$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

Per ottenere gli altri coefficienti, si moltiplicano ambo i membri della (4) per cosnx.

$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx \cos nx + b_k senkx \cos nx)$

Questa serie è uniformemente convergente e quindi possiamo integrarla termine a termine ottenendo

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}(a_k\cos kx\cos nx + b_k senkx\cos nx)$$

Per le (6) e (7) gli integreli a secondo membro sono tutti nulli eccettuato quello di coefficiente $a_n$ che vale $\pi$, si ha

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = a_n\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

Per ottenere $b_n$ moltiplichiamo ambo i membri della (4) per sennx e poi integriamo fra 0 e $2\pi$. Tutti gli integrali a secondo membro sono nulli eccettuato quello di coefficiente $b_n$ che vale $\pi$.

Quindi

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) sennx dx$$

Le formule (5) si chiamano formule di Eulero-Fourier

## 4.Serie di Fourier

Il teorema precedente richiama la nostra attenzione sui numeri $a_n, b_n$ e sulle serie trigonometriche che hanno tali numeri come coefficienti. I suddetti numeri $a_n, b_n$ sono completamente determinati dalla funzione f ed esistono non appena la f sia generalmente continua e integrabile assolutamente in $[0,2\pi]$.

Infatti, essendo

$$|\cos nx| \leq 1 \qquad |sennx| \leq 1$$

risulta

$$|f(x)\cos nx| \leq |f(x)| \qquad |f(x) sennx| \leq |f(x)|$$

e quindi anche le funzioni f(x)cosnx, f(x)senx sono assolutamente integrabili in $[0,2\pi]$.

Questi numeri $a_n, b_n$ sono detti coefficienti di Fourier della f, e la serie trigonometrica che li ha come coefficienti è detta serie di Fourier della f stessa.

*Se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo $2\pi$, assolutamente integrabile in $[0,2\pi]$, si chiama sua serie di Fourier la serie trigonometrica*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k senkx) \quad (9)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \text{ (k=0,1,2..)}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) senkx dx \quad \text{(k=1,2,..)} \quad (10)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k senkx) \ (11)$$

**Definizione** *Una funzione numerica f definita nell'intervallo $[0,2\pi]$ dicesi continua e monotona a tratti se si può decomporre l'intervallo $[0,2\pi]$ in un numero finito di intervalli privi a due a due di punti interni comuni tali che nell'interno di ciascuno di essi la f sia continua e monotona.*

In queste ipotesi la f(x) ammette limite quando x tende a zero e a $2\pi$ e ammette certamente limiti sinistro e destro in ogni estremo degli intervalli.

**Teorema di Dirichlet** *La serie di Fourier della funzione f, continua e monotona a tratti nell'intervallo* $[0,2\pi]$ *e ivi limitata,converge verso f nei punti di continuità per f interni all'intervallo* $[0,2\pi]$, *converge verso la media aritmetica dei limiti sinistro e destro in ogni punto di discontinuità per f interno all'intervallo* $[0,2\pi]$; *converge verso*

$$\frac{\lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to 2\pi} f(x)}{2}$$

*in ciascuno dei due estremi* $0$ *e* $2\pi$.

In particolare si ha

*Una funzione continua e monotona a tratti in* $[0,2\pi]$ *e ivi limitata, è sviluppabile in serie di Fourier in tutti i punti interni a* $[0,2\pi]$ *nei quali essa è continua*

Inoltre possiamo dimostrare anche il seguente teorema

*Nelle ipotesi del teorema precedente per la funzione f, in ogni intervallo* $[a,b]$, *che abbia gli estremi interni a* $[0,2\pi]$ *ove la f è continua, la serie di Fourier converge uniformemente verso f.*

## 5.Funzioni pari e dispari

Consideriamo due casi particolari di serie di Fourier.

Dimostriamo che

*Se la funzione f, periodica di periodo* $2\pi$, *è pari, nella serie di Fourier si ha*

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx \ (k=0,1,2,...) \quad b_k = 0 \ (k=1,2,..)$$

*se invece f è dispari si ha*

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx \ (k=1,2,...) \quad a_k = 0 \ (k=1,2,..)$$

Infatti se f, periodica è pari, allora è pari anche f(x)coskx, mentre è dispari f(x)senkx.

Quindi, per la parità di f(x)coskx,

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx dx = \int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

risulta

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

mentre per la disparità di f(x)senkx, si ha

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)senkxdx = -\int_{0}^{\pi} f(x)senkxdx$$

e quindi
$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)senkxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)senkxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)senkxdx = 0$

Analogamente si ragiona quando f è dispari

*Se la funzione f, periodica di periodo $2\pi$ e integrabile in $[-\pi,\pi]$, è una funzione pari, la sua serie di Fourier è una serie di soli coseni, che si scrive*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad con \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kxdx$$

*se invece è una funzione dispari la sua serie di Fourier è una serie di soli seni che si scrive*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k senkx \quad con \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)senkxdx$$

## 6:Serie in forma esponenziale

La sovrapposizione di armoniche elementari con frequenze multiple di una fissata frequenza fondamentale, che stabiliamo uguale a $1/2\pi$, dà luogo ai polinomi trigonometrici.

Scrivendo le armoniche fondamentali in termini di frequenza e fase, un polinomio trigonometrico di grado n si può scrivere nella forma

$$P(t)=a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k sen(kt + \varphi_k)$$

I polinomi trigonometrici possono anche essere anche rappresentati in notazione complessa.
Ricordando le formule

$$\cos kt=\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} \qquad senkt=\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2}$$

si ottiene

$$P(t)=a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k senkt) = c_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_k e^{ikt} + c_{-k}e^{-ikt}) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

dove i numeri $c_k$ sono dati da

$$c_0 = a_0 \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \qquad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

Viceversa, ogni espressione del tipo

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

può essere vista come la sovrapposizione di vibrazioni scritte in forma complessa;il risultato di tale sovrapposizione sarà reale anzichè complesso se e solo se $a_k = c_k + c_{-k}$ è reale e $b_k = i(c_k - c_{-k})$ è immaginario puro.

# 7.Esempi

1) Sia f(x) la funzione periodica di periodo $2\pi$ che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è definita dalla legge

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=-\pi \\ x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x=\pi \end{cases}$$

La sua serie di Fourier è di soli seni con

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,sen\,kx\,dx = -(-1)^k \frac{2}{k}$$

$$f(x)=2\left(\frac{senx}{1} - \frac{sen2x}{2} + \frac{sen3x}{3} + \ldots\right) = x \quad -\pi < x < \pi$$

$$\frac{\lim_{x\to-\pi} f(x) + \lim_{x\to\pi} f(x)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0 \quad \text{per } x=\pm\pi$$

Si osservi che l'esempio mostra come possa essere discontinua la somma di una serie di funzioni continue.

2) Sia f la funzione periodica di periodo $2\pi$ che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è definita da

$$f(x)=|x|$$

E' una funzione pari e monotona a tratti in $[-\pi, \pi]$.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \pi \quad \text{per } k=0$$

$$=0 \quad \text{per } k=2,4,6,..$$

$$=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{k^2} \quad \text{per } k=1,3,5,...$$

in base al teorema di Dirichlet possiamo scrivere

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) \text{ in } -\pi \le x \le \pi$$

3) Sia f la funzione periodica di periodo $2\pi$ e pari definita in $[-\pi, \pi]$ da $F(x)=x^2$

Si ha

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos kx\,dx = (-1)^k\frac{4}{k^2} \quad \text{per } k>0$$

In base al teorema di Dirichlet si ha

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\right]$$